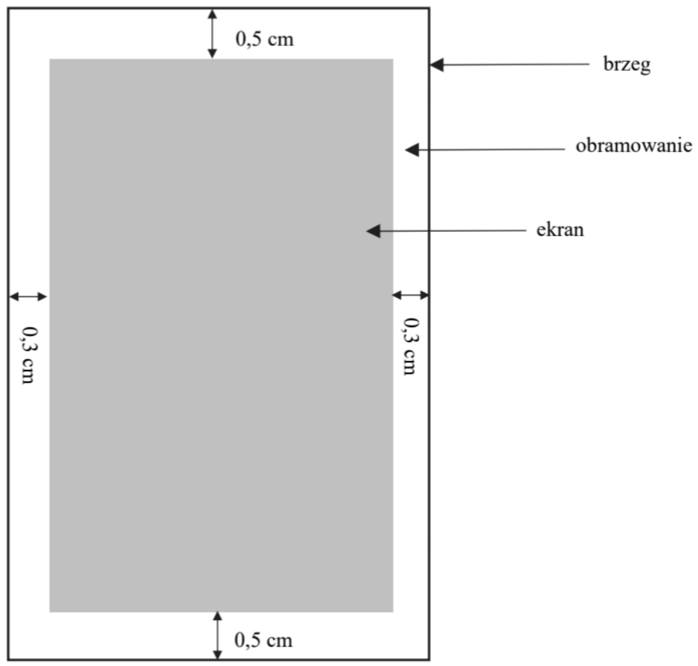
NOWA FORMUŁA:

1. ZADANIE 15 (0-7) M2020

Należy zaprojektować wymiary prostokątnego ekranu smartfona, tak aby odległości tego ekranu od krótszych brzegów smartfona były równe 0,5 cm każda, a odległości tego ekranu od dłuższych brzegów smartfona były równe 0,3 cm każda (zobacz rysunek – ekran zaznaczono kolorem szarym). Sam ekran ma mieć powierzchnię 60cm^2. Wyznacz takie wymiary ekranu smartfona, przy których powierzchnia ekranu wraz z obramowaniem jest najmniejsza.



x = 100 i y = 60

2. ZADANIE 15 (0-7) M2019

Rozważmy wszystkie graniastosłupy prawidłowe trójkątne o objętości $V = 2$. Wyznacz długości krawędzi tego z rozważanych graniastosłupów, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze. Oblicz to najmniejsze pole.

$\boldsymbol{Pc = 6\sqrt{3}}$

3. ZADANIE 7 (0-2) C2019

Dana jest funkcja f określona wzorem $\boldsymbol{f(x) = \frac{25x^2-9}{x^2+2}}$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Oblicz wartość $\boldsymbol{f'(10)}$ pochodnej tej funkcji dla argumentu 10.

$\frac{295}{2601}$

4. ZADANIE 15 (0-7) C2019

Dany jest okrąg o środku S i promieniu 18. Rozpatrujemy pary okręgów: jeden o środku S_1 i promieniu x oraz drugi o środku S_2 i promieniu $2x$, o których wiadomo, że spełniają jednocześnie następujące warunki:

- rozważane dwa okręgi są styczne zewnętrznie;
- obydwa rozważane okręgi są styczne wewnętrznie do okręgu o środku S i promieniu 18;
- punkty: S, S_1, S_2 nie leżą na jednej prostej.

Pole trójkąta o bokach a, b, c można obliczyć ze wzoru Herona $P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, gdzie p – jest połową obwodu trójkąta.

Zapisz pole trójkąta SS_1S_2 jako funkcję zmiennej x. Wyznacz dziedzinę tej funkcji i oblicz długości boków tego z rozważanych trójkątów, którego pole jest największe. Oblicz to największe pole.

$P(x) = 6x\sqrt{18-3x}\ dla\ x \in (0,6), P_{max} = P(4) = 24\sqrt{6}, boki: 10, 12, 14$

5. ZADANIE 6 (0-3) M2018

Styczna do paraboli o równaniu $y = \sqrt{3}x^2 - 1$ w punkcie $P = (x_0, y_0)$ jest nachylona do osi OX pod kątem 30° . Oblicz współrzędne punktu P.

$x_0 = \frac{1}{6}, y_0 = \frac{\sqrt{3}-36}{36}$

6. ZADANIE 15 (0-7) M2018

Rozpatrujemy wszystkie trapezy równoramienne, w które można wpisać okrąg, spełniające warunek: suma długości dłuższej podstawy a i wysokości trapezu jest równa 2.

a) Wyznacz wszystkie wartości a, dla których istnieje trapez o podanych własnościach.
b) Wykaż, że obwód L takiego trapezu, jako funkcja długości a dłuższej podstawy trapezu, wyraża się wzorem $L(a) = \frac{4a^2-8a+8}{a}$.
c) Oblicz tangens kąta ostrego tego spośród rozpatrywanych trapezów, którego obwód jest najmniejszy.

$D_L = (1,2),\ tg\sphericalangle ABC = 1$

7. ZADANIE 5 (0-2) C2018

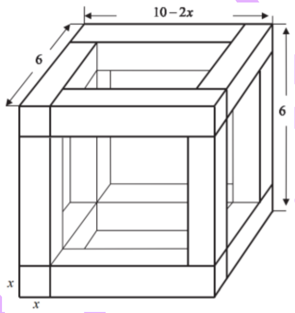
Oblicz współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$, określonej dla każdej liczby rzeczywistej $x\neq 1$, poprowadzonej w punkcie $A=\left(6,\frac{36}{5}\right)$ tego wykresu.

W poniższe kratki wpisz kolejno cyfrę jedności i dwie cyfry po przecinku skończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

$\frac{24}{25}$

8. ZADANIE 15 (0-7) C2018

Rozpatrujemy wszystkie możliwe drewniane szkielety o kształcie przedstawionym na rysunku, wykonane z listewek. Każda z tych listewek ma kształt prostopadłościanu o podstawie kwadratu o boku długości *x*. Wymiary szkieletu zaznaczono na rysunku.



A. Wyznacz objętość *V* drewna potrzebnego do budowy szkieletu jako funkcję zmiennej *x*.
B. Wyznacz dziedzinę funkcji *V*.
C. Oblicz tę wartość *x*, dla której zbudowany szkielet jest możliwie najcięższy, czyli kiedy funkcja *V* osiąga wartość największą. Oblicz tę największą objętość.

a) $V(x)=8(11-3x)x^2$ b) $x\in\left(0,\frac{5}{2}\right)$ c) $V_{max}=V\left(\frac{22}{9}\right)=\frac{42591}{243}$

9. ZADANIE 6 (0-3) M2017

Funkcja *f* jest określona wzorem $f(x)=\frac{x-1}{x^2+1}$ liczby rzeczywistej *x*. Wyznacz równanie stycznej do wykresu tej funkcji w punkcie $P=(1,0)$.

$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

10. ZADANIE 15 (0-7) M2017

Rozpatrujemy wszystkie walce o danym polu powierzchni całkowitej *P*. Oblicz wysokość i promień podstawy tego walca, którego objętość jest największa. Oblicz tę największą objętość.

$$\boldsymbol{r = \sqrt{\frac{P}{6\pi}}, h = \sqrt{\frac{2P}{3\pi}}, V = \frac{P}{3}\cdot\sqrt{\frac{P}{6\pi}}}$$

11. ZADANIE 15 (0-7) C2017

Rozpatrujemy wszystkie prostopadłościany o objętości 8, których stosunek długości dwóch krawędzi wychodzących z tego samego wierzchołka jest równy 1:2 oraz suma długości wszystkich dwunastu krawędzi jest mniejsza od 28. Wyznacz pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu jako funkcję długości jednej z jego krawędzi. Wyznacz dziedzinę tej funkcji. Oblicz wymiary tego spośród rozpatrywanych prostopadłościanów, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze.

$$\boldsymbol{P_c(a) = 4a^2 + \frac{24}{a}\ dla\ a \in (1,2), krawędzie: \sqrt[3]{3}, 2\sqrt[3]{3}, \frac{4\sqrt[3]{3}}{3}}$$

12. ZADANIE 4 (0-1) M2016

Funkcja $\boldsymbol{f(x) = \frac{3x-1}{x^2+4}}$ jest określona dla każdej liczby rzeczywistej *x*. Pochodna tej funkcji jest określona wzorem

A. $f(x) = \frac{-3x^2+2x+12}{(x^2+4)^2}$

B. $f(x) = \frac{-9x^2+2x-12}{(x^2+4)^2}$

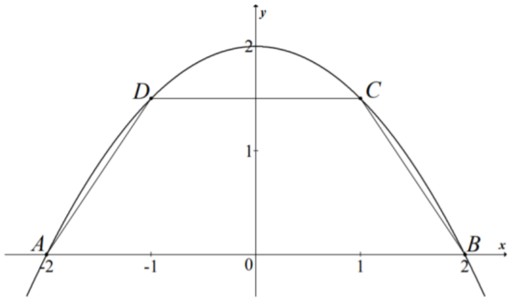
C. $f(x) = \frac{3x^2-2x-12}{(x^2+4)^2}$

D. $f(x) = \frac{9x^2-2x+12}{(x^2+4)^2}$

A

13. ZADANIE 16 (0-7) M2016

Parabola o równaniu $\boldsymbol{y = 2 - \frac{1}{2}x^2}$ przecina oś OX układu współrzędnych w punktach $\boldsymbol{A = (-2, 0)}$ i $\boldsymbol{B = (2, 0)}$. Rozpatrujemy wszystkie trapezy równoramienne *ABCD*, których dłuższą podstawą jest odcinek *AB*, a końce *C* i *D* krótszej podstawy leżą na paraboli (zobacz rysunek).



Wyznacz pole trapezu *ABCD* w zależności od pierwszej współrzędnej wierzchołka *C.* Oblicz współrzędne wierzchołka *C* tego z rozpatrywanych trapezów, którego pole jest największe.

$$C=\left(\frac{2}{3},\frac{16}{9}\right)$$

14. ZADANIE 17 (0-7) C2016

Rozpatrujemy wszystkie walce, których pole powierzchni całkowitej jest równe 2π . Oblicz promień podstawy tego walca, który ma największą objętość. Podaj tę największą objętość.

$$r=\frac{\sqrt{3}}{3},\ V=\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$$

15. ZADANIE 12 (0-4) M2015

Funkcja *f* określona jest wzorem $f(x)=x^3-2x^2+1$ dla każdej liczby rzeczywistej *x*. Wyznacz równania tych stycznych do wykresu funkcji *f* , które są równoległe do prostej o równaniu $y=4x$.

$y=4x+\frac{67}{27}$ i $y=4x-7$

16. ZADANIE 16 (0-7) M2015

Rozpatrujemy wszystkie stożki, których przekrojem osiowym jest trójkąt o obwodzie 20. Oblicz wysokość i promień podstawy tego stożka, którego objętość jest największa. Oblicz objętość tego stożka

$$r=4\,,h=\sqrt{20}=2\sqrt{5}\,,V(4)=\frac{32\pi\sqrt{5}}{3}$$

17. ZADANIE 3 (0-1) C2015

Która z poniższych funkcji, określonych w zbiorze liczb rzeczywistych, nie ma minimum lokalnego ani maksimum lokalnego?

A) $f(x)=4x^2+5x$

B) $f(x)=3x^3+2x^2$

C) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x$

D) $f(x) = (4x+1)^2$

C

18.ZADANIE 16 (0-7) C2015

Rozpatrujemy wszystkie stożki, w których suma długości tworzącej i promienia podstawy jest równa 2. Wyznacz wysokość tego spośród rozpatrywanych stożków, którego objętość jest największa. Oblicz tę objętość.

$h = \frac{2\sqrt{5}}{5}, V = \frac{32\sqrt{5}}{375}\pi$