NOWA FORMUŁA:

1.ZADANIE 2 (0-1) M2020

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = \frac{3n^2+7n-5}{11-5n+5n^2}$ dla każdej liczby naturalnej n ≥1. Granica tego ciągu jest równa

A. 3

B. $\frac{1}{5}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $-\frac{5}{11}$

C

2.ZADANIE 10 (0-5) M2020

W trzywyrazowym ciągu geometrycznym (a_1, a_2, a_3) spełniona jest równość $a_1 + a_2 + a_3 = \frac{21}{4}$. Wyrazy a_1, a_2, a_3 są – odpowiednio – czwartym, drugim i pierwszym wyrazem rosnącego ciągu arytmetycznego. Oblicz a_1.

$a_1 = 3$

3.ZADANIE 5 (0-2) M2019

Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{9n^3 + 11n^2}{7n^3 + 5n^2 + 3n + 1} - \frac{n^2}{3n^2 + 1}\right)$$

Wpisz w poniższe kratki – od lewej do prawej – trzy kolejne cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

952 lub 523 lub 238 lub 380 lub 809 lub 095

ZADANIE 12 (0-6) M2019

Trzywyrazowy ciąg (a, b, c) o wyrazach dodatnich jest arytmetyczny, natomiast ciąg $(\frac{1}{a}, \frac{2}{3b}, \frac{1}{2a+2b+c})$ jest geometryczny. Oblicz iloraz ciągu geometrycznego.

$\boldsymbol{q = \frac{1}{3}}$

4.ZADANIE 4 (0-1) C2019

Nieskończony ciąg geometryczny (a_n) jest określony w następujący sposób: $a_1 = \frac{3}{5}$ oraz $a_{n+1} = \frac{2}{3} \cdot a_n$ dla $n \geq 1$. Suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa

A. $\frac{5}{3}$
B. $\frac{10}{9}$
C. $\frac{9}{10}$
D. $\frac{9}{5}$

D

5.ZADANIE 13 (0-4) M2018

Wyrazy ciągu geometrycznego (a_n) , określonego dla $n \geq 1$, spełniają układ równań

$$\begin{cases} a_3 + a_6 = -84 \\ a_4 + a_7 = 168 \end{cases}$$

Wyznacz liczbę *n* początkowych wyrazów tego ciągu, których suma S_n jest równa 32769.

$\boldsymbol{n = 15}$

6.ZADANIE 10 (0-4) C2018

Dany jest rosnący ciąg geometryczny (a, aq, aq^2) , którego wszystkie wyrazy i iloraz są liczbami całkowitymi nieparzystymi. Jeśli największy wyraz ciągu zmniejszymy o 4, to otrzymamy ciąg arytmetyczny. Oblicz wyraz *aq* tego ciągu.

aq = 3

7.ZADANIE 11 (0-4) C2018

Dany jest nieskończony ciąg okręgów (o_n) o równaniach $x^2 + y^2 = 2^{11-n}$, $n \geq 1$. Niech P_k będzie pierścieniem ograniczonym zewnętrznym okręgiem o_{2k-1} i wewnętrznym okręgiem o_{2k}. Oblicz sumę pól wszystkich pierścieni P_k gdzie $k \geq 1$.

$\frac{2048\pi}{3}$

8.ZADANIE 2 (0-1) M2017

Nieskończony ciąg liczbowy jest określony wzorem $a_n = \frac{(n^2-10n)(2-3n)}{2n^2+n^2+3}$ dla $n \geq 1$. Wtedy

A. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$
B. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
C. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$
D. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\frac{3}{2}$

D

9.ZADANIE 14 (0-6) M2017

Liczby *a, b, c* są – odpowiednio – pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Suma tych liczb jest równa 27. Ciąg $(a-2, b, 2c+1)$ jest geometryczny. Wyznacz liczby *a, b, c* .

$a = 5$, $b = 9$, $c = 13$ **oraz** $a = \frac{31}{2}$, $b = 9$, $c = \frac{5}{2}$

10.ZADANIE 5 (0-1) C2017

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny, w którym iloraz jest trzy razy większy od pierwszego wyrazu, a suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa $\frac{1}{4}$. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy

A. $\frac{3}{7}$
B. $\frac{1}{7}$
C. $\frac{7}{3}$
D. 7

B

11.ZADANIE 10 (0-5) C2017

Ciąg (a_n) jest arytmetyczny, a ciąg (b_n) jest geometryczny. Pierwszy wyraz a_1 ciągu arytmetycznego jest ilorazem ciągu geometrycznego (b_n) . Wyrazy ciągu (a_n) są liczbami całkowitymi, a suma ośmiu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa 124. Natomiast pierwszy wyraz b_1 ciągu geometrycznego jest różnicą ciągu arytmetycznego (a_n) . Suma dwóch pierwszych wyrazów ciągu geometrycznego (b_n) jest równa 18. Wyznacz te ciągi.

$\boldsymbol{a_n = 3n + 2, b_n = 3 * 5^{n-1}, dla\ n \in N}$

12.ZADANIE 5 (0-1) M2016

Granica $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(pn^2+4n)^3}{5n^6-4} = -\frac{8}{5}$. Wynika stąd, że

A. $p = -8$
B. $p = 4$
C. $p = 2$
D. $p = -2$

D

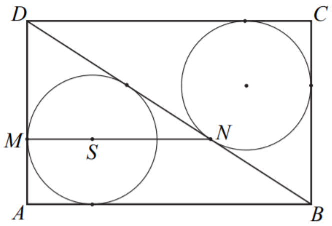
13.ZADANIE 7 (0-2) M2016

Dany jest ciąg geometryczny (a_n) określony wzorem $a_n = \left(\frac{1}{2x-371}\right)^n$ dla $n \geq 1$. Wszystkie wyrazy tego ciągu są dodatnie. Wyznacz najmniejszą liczbę całkowitą *x*, dla której nieskończony szereg $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ jest zbieżny.

187

14.ZADANIE 9 (0-3) M2016

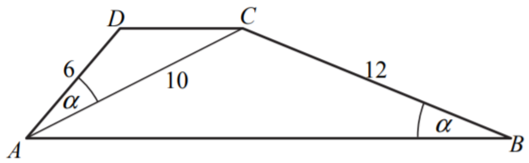
Dany jest prostokąt *ABCD*. Okrąg wpisany w trójkąt *BCD* jest styczny do przekątnej *BD* w punkcie *N*. Okrąg wpisany w trójkąt *ABD* jest styczny do boku *AD* w punkcie *M*, a środek *S* tego okręgu leży na odcinku *MN*, jak na rysunku.



Wykaż, że $|MN| = |AD|$

15.ZADANIE 3 (0-1) C2016

W trapezie *ABCD* o podstawach *AB* i *CD* dane są: $|AD| = 6$, $|BC| = 12$, $|AC| = 10$ oraz $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle CAD|$ (zobacz rysunek).



Wówczas długość podstawy *AB* tego trapezu jest równa

A. $|AB| = 18$
B. $|AB| = 20$
C. $|AB| = 22$
D. $|AB| = 24$

B

16.ZADANIE 5 (0-1) C2016

Granica $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-7n^3+3n}{1+2n+3n^2+4n^5}$ jest równa

A. $-\infty$
B. $-\frac{7}{4}$
C. 0
D. $+\infty$

C

17.ZADANIE 6 (0-2) C2016

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n) określony dla $n \geq 1$, w którym iloraz jest równy pierwszemu wyrazowi, a suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa 12. Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu. Zakoduj kolejno pierwsze trzy cyfry po przecinku otrzymanego wyniku.

$\frac{12}{13}$

18.ZADANIE 10 (0-3) C2016

Dany jest ciąg (a_n) określony dla każdej liczby całkowitej $n \geq 1$, w którym $a_4 = 4$ oraz dla każdej liczby $n \geq 1$ prawdziwa jest równość $a_{n+1} = a_n + n - 4$. Oblicz pierwszy wyraz ciągu (a_n) i ustal, czy ciąg ten jest malejący.

$\boldsymbol{a_1 = 10, ciąg\ nie\ jest\ malejący}$

19.ZADANIE 6 (0-2) M2015

Oblicz granicę $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{11n^3+6n+5}{6n^3+1} - \frac{2n^2+2n+1}{5n^2-4}\right)$. W poniższe kratki wpisz kolejno cyfrę jedności i pierwsze dwie cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

143

20.ZADANIE 15 (0-6) M2015

Suma wszystkich czterech współczynników wielomianu $W(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ jest równa 0. Trzy pierwiastki tego wielomianu tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy równej 3. Oblicz współczynniki a, b i c. Rozważ wszystkie możliwe przypadki.

$(\boldsymbol{a = -12}, \boldsymbol{b = 39}, \boldsymbol{c = -28})$ **lub** $(\boldsymbol{a = -3}, \boldsymbol{b = -6}, \boldsymbol{c = 8})$ **lub** $(\boldsymbol{a = 6}, \boldsymbol{b = 3}, \boldsymbol{c = -10})$

21.ZADANIE 1 (0-1) C2015

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_{n+1} = a_n + n - 6$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Trzeci wyraz tego ciągu jest równy $a_3 = -1$. Wyraz a_2 jest równy

A. -3
B. -2
C. 2
D. 3

D

STARA FORMUŁA:

22.ZADANIE 5 (0-5) M2020

W trzywyrazowym ciągu geometrycznym (a_1, a_2, a_3) spełniona jest równość $a_1 + a_2 + a_3 = \frac{21}{4}$. Wyrazy a_1, a_2, a_3 są – odpowiednio – czwartym, drugim i pierwszym wyrazem rosnącego ciągu arytmetycznego. Oblicz a_1 .

$\boldsymbol{a_1 = 3}$

23.ZADANIE 4 (0-5) M2019

Ciąg (a, b, c) jest geometryczny, ciąg $(a+1, b+5, c)$ jest malejącym ciągiem arytmetycznym oraz

$a + b + c = 39$. Oblicz *a*, *b*, *c*.

$\boldsymbol{(a, b, c) = (25, 10, 4)}$

24.ZADANIE 4 (0-4) C2019

W ciągu geometrycznym $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ suma wyrazów o numerach nieparzystych jest równa 182, a stosunek sumy wyrazów o numerach nieparzystych do sumy wyrazów o numerach parzystych jest równy $\frac{1}{3}$. Wyznacz wszystkie wyrazy tego ciągu.

$\boldsymbol{(2, 6, 18, 54, 162, 486)}$

25.ZADANIE 2 (0-5) M2018

Liczby *a*, *b*, *c*, spełniające warunek $3a + b + 3c = 77$, są odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Ciąg $(a, b+1, 2c)$ jest geometryczny. Wyznacz liczby *a*, *b*, *c* oraz podaj wyrazy ciągu geometrycznego.

(a, b, c) = (4, 11, 18) lub (a, b, c) = (18, 11, 4), ciągi to (4, 12, 36) lub (18, 12, 8)

26.ZADANIE 4 (0-4) C2018

Dany jest rosnący ciąg geometryczny (a, aq, aq^2) , którego wszystkie wyrazy i iloraz są liczbami całkowitymi nieparzystymi. Jeśli największy wyraz ciągu zmniejszymy o 4, to otrzymamy ciąg arytmetyczny. Oblicz wyraz *aq* tego ciągu.

aq = 3

27.ZADANIE 4 (0-6) M2017

Liczby *a*, *b*, *c* są – odpowiednio – pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Suma tych liczb jest równa 27. Ciąg $(a-2, b, 2c+1)$ jest geometryczny. Wyznacz liczby *a*, *b*, *c*.

28.ZADANIE 4 (0-6) M2016

Ciąg (*a*, 4, *b*, *c*) jest arytmetyczny, a ciąg (*a*, *a* + *b*, 4*c*) jest geometryczny. Oblicz *a*, *b* i *c*.

29.ZADANIE 4 (0-3) C2016

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n + 3n + 2 \end{cases}$ dla $n \geq 1$.

Oblicz średnią arytmetyczną liczb $a_2 + 3$ i $a_3 + 2$.

30.ZADANIE 7 (0-4) M2015

O trapezie *ABCD* wiadomo, że można w niego wpisać okrąg, a ponadto długości jego boków *AB*, *BC*, *CD*, *AD* – w podanej kolejności – tworzą ciąg geometryczny. Uzasadnij, że trapez *ABCD* jest rombem.

31.ZADANIE 7 (0-6) C2015

Trzy liczby, których suma jest równa 105, są kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu geometrycznego. Pierwsza z tych liczb jest jednocześnie pierwszym, druga szóstym, a trzecia dwudziestym szóstym wyrazem pewnego ciągu arytmetycznego. Oblicz te liczby.

32.ZADANIE 7 (0-6) M2014

Ciąg geometryczny (a_n) ma 100 wyrazów i są one liczbami dodatnimi. Suma wszystkich wyrazów o numerach nieparzystych jest sto razy większa od sumy wszystkich wyrazów o numerach parzystych oraz $\log a_1 + \log a_2 + \log a_3 + \cdots + \log a_{100} = 100$. Oblicz a_1.

$\boldsymbol{a_1 = 10^{100}}$

33.ZADANIE 8 (0-6) C2014

Trzy liczby są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, którego iloraz jest różny od 1. Jeżeli weźmiemy kolejno drugą z nich, pierwszą i trzecią, to otrzymamy trzy kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego. Jeżeli pierwszy wyraz tego ciągu arytmetycznego zmniejszymy o 7, drugi pozostawimy bez zmian, a trzeci zwiększymy o 3, to otrzymamy trzy kolejne wyrazy ciągu geometrycznego. Oblicz te liczby.

34.ZADANIE 5 (0-5) M2013

Ciąg liczbowy (a, b, c) jest arytmetyczny i $a + b + c = 33$, natomiast ciąg $(a-1, b+5, c+19)$ jest geometryczny. Oblicz a, b, c.

$\boldsymbol{a = 33, b = 11, c = -11}$ **lub** $\boldsymbol{a = 9, b = 11, c = 13}$

35.ZADANIE 10 (0-4) C2013

Liczby $a_1, a_2, \cdots, a_n$ są dodatnie i w podanej kolejności tworzą ciąg geometryczny. Uzasadnij, że prawdziwa jest równość $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n} = \sqrt{a_1 \cdot a_n}$.

36.ZADANIE 5 (0-6) M2012

Trzy liczby tworzą ciąg geometryczny. Jeżeli do drugiej liczby dodamy 8, to ciąg ten zmieni się w arytmetyczny. Jeżeli zaś do ostatniej liczby nowego ciągu arytmetycznego dodamy 64, to tak otrzymany ciąg będzie znów geometryczny. Znajdź te liczby. Uwzględnij wszystkie możliwości.

$\boldsymbol{(a, b, c) = \left(\frac{4}{9}, -\frac{20}{9}, \frac{100}{9}\right) \; lub \; (a,\ b,\ c) = (4, 12, 36)}$

37.ZADANIE 5 (0-5) C2012

W ciągu arytmetycznym (a_n) dla $n \geq 1$, dane są $a_1 = -2$ oraz różnica $r = 3$. Oblicz największe *n* takie, że

$a_1 + a_2 + \cdots + a_n < 2012$.

n = 37

38.ZADANIE 5 (0-4) M2011

O ciągu (x_n) dla $n \geq 1$ wiadomo, że:

a) ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = 3^{x_n}$ dla $n \geq 1$ jest geometryczny o ilorazie $q = 27$.

b) $x_1 + x_2 + \cdots + x_{10} = 145$.

Oblicz x_1.

39.ZADANIE 5 (0-5) M2010

O liczbach *a*, *b*, *c* wiemy, że ciąg (a, b, c) jest arytmetyczny i $a + c = 10$, zaś ciąg $(a + 1, b + 4, c + 19)$ jest geometryczny. Wyznacz te liczby.

(a, b, c) = (26, 5, - 16) lub (a, b, c) = (2, 5, 8)

40.ZADANIE 4 (0-5) M2009

W skarbcu królewskim było *k* monet. Pierwszego dnia rano skarbnik dorzucił 25 monet, a każdego następnego ranka dorzucał o 2 monety więcej niż dnia poprzedniego. Jednocześnie ze skarbca król zabierał w południe każdego dnia 50 monet. Oblicz najmniejszą liczbę *k*, dla której w każdym dniu w skarbcu była co najmniej jedna moneta, a następnie dla tej wartości *k* oblicz, w którym dniu w skarbcu była najmniejsza liczba monet.

k = 170, 13 dnia

41.ZADANIE 7 (0-6) M2009

Ciąg $(x - 3, x + 3, 6x + 2, \ldots)$ jest nieskończonym ciągiem geometrycznym o wyrazach dodatnich. Oblicz iloraz tego ciągu i uzasadnij, że $\frac{S_{19}}{S_{20}} < \frac{1}{4}$, gdzie S_n oznacza sumę *n* początkowych wyrazów tego ciągu.

q = 4

42.ZADANIE 6 (0-3) M2008

Udowodnij, że jeżeli ciąg (a, b, c) jest jednocześnie arytmetyczny i geometryczny, to $a = b = c$.

43.ZADANIE 11 (0-4) M2007

Suma *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) wyraża się wzorem $S_n = 2n^2 + n$ dla $n \geq 1$.

a) Oblicz sumę 50 początkowych wyrazów tego ciągu o numerach parzystych: $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{100}$.

b) Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{3n^2-2}$.

a) 10150 b) $\frac{2}{3}$