

## NOWA FORMUŁA:

### 1.ZADANIE 12 (0-5) M2020

Prosta o równaniu  $x + y - 10 = 0$  przecina okrąg o równaniu

$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 8 = 0$  w punktach  $K$  i  $L$ . Punkt  $S$  jest środkiem cięciwy  $KL$ . Wyznacz równanie obrazu tego okręgu w jednokładności o środku  $S$  i skali  $k = -3$ .

$$(x - 10)^2 + (y - 9)^2 = 153$$

### 2.ZADANIE 7 (0-2) M2019

Punkt  $P = (10, 2429)$  leży na paraboli o równaniu  $y = 2x^2 + x + 2219$ . Prosta o równaniu kierunkowym  $y = ax + b$  jest styczna do tej paraboli w punkcie  $P$ . Oblicz współczynnik  $b$ .

$$b = 2019$$

### 3.ZADANIE 11 (0-6) M2019

Dane są okręgi o równaniach  $x^2 + y^2 - 12x - 8y + 43 = 0$  i  $x^2 + y^2 - 2ax + 4y + a^2 - 77 = 0$ . Wyznacz wszystkie wartości parametru  $a$ , dla których te okręgi mają dokładnie jeden punkt wspólny. Rozważ wszystkie przypadki.

$$a \in \{6 - 6\sqrt{3}, 6, 6 + 6\sqrt{3}\}$$

### 4.ZADANIE 2 (0-1) C2019

Dane są trzy nie współliniowe punkty:  $A = (1, 1)$ ,  $B = (6, 3)$ ,  $C = (4, 5)$ . Ile jest wszystkich punktów  $D$  takich, że czworokąt o wierzchołkach w punktach  $A, B, C, D$  jest równoległobokiem?

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4

**C**

### 5.ZADANIE 14 (0-6) M2018

**Maturalne pewniaki – poziom rozszerzony:  
geometria analityczna**

Punkt  $A = (7, -1)$  jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego  $ABC$ , w którym  $|AC| = |BC|$ . Obie współrzędne wierzchołka  $C$  są liczbami ujemnymi. Okrąg wpisany w trójkąt  $ABC$  ma równanie  $x^2 + y^2 = 10$ . Oblicz współrzędne wierzchołków  $B$  i  $C$  tego trójkąta.

$$B = \left(-\frac{17}{5}, \frac{31}{5}\right), C = \left(-3, -\frac{13}{3}\right)$$

### 6.ZADANIE 11 (0-4) C2018

Dany jest nieskończony ciąg okręgów  $(O_n)$  o równaniach

$x^2 + y^2 = 2^{11-n}$ ,  $n \geq 1$ . Niech  $P_k$  będzie pierścieniem ograniczonym zewnętrznym okręgiem  $O_{2k-1}$  i wewnętrznym okręgiem  $O_{2k}$ . Oblicz sumę pól wszystkich pierścieni  $P_k$  gdzie  $k \geq 1$ .

$$\frac{2048\pi}{3}$$

### 7.ZADANIE 13 (0-5) C2018

Wierzchołki  $A$  i  $B$  trójkąta prostokątnego  $ABC$  leżą na osi  $OY$  układu współrzędnych. Okrąg wpisany w ten trójkąt jest styczny do boków  $AB$ ,  $BC$  i  $CA$  w punktach – odpowiednio –  $P = (0, 10)$ ,  $Q = (8, 6)$  i  $R = (9, 13)$ . Oblicz współrzędne wierzchołków  $A$ ,  $B$  i  $C$  tego trójkąta.

$$A = (0, 25), B = (0, 0), C = (12, 9)$$

### 8.ZADANIE 4 (0-1) M2017

Dane są punkt  $B = (-4, 7)$  i wektor  $\vec{u} = [-3, 5]$ . Punkt  $A$ , taki, że  $\overrightarrow{AB} = -3\vec{u}$ , ma współrzędne

- a)  $A = (5, -8)$
- b)  $A = (-13, 22)$
- c)  $A = (9, -15)$
- d)  $A = (12, 24)$

**B**

### 9.ZADANIE 13 (0-5) M2017

Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkty  $A = (-5, 3)$  i  $B = (0, 6)$ , którego środek leży na prostej o równaniu  $x - 3y + 1 = 0$ .

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{289}{9}$$

### 10. ZADANIE 3 (0-1) C2017

Punkt  $P' = (3, -3)$  jest obrazem punktu  $P = (1, 3)$  w jednokładności o środku w punkcie  $S = (-2, 12)$ . Skala tej jednokładności jest równa

- a)  $\frac{3}{5}$
- b)  $\frac{5}{3}$
- c) 2
- d) 3

**B**

### 11. ZADANIE 12 (0-5) C2016

Prosta  $l$ , na której leży punkt  $P = (8, 2)$ , tworzy z dodatnimi półosiąmi układu współrzędnych trójkąt prostokątny o polu równym 36. Wyznacz równanie prostej  $l$ .

$$y = -\frac{1}{2}x + 6, y = -\frac{1}{8}x + 3$$

### 12. ZADANIE 13 (0-5) M2015

Punkty  $A = (30, 32)$  i  $B = (0, 8)$  są sąsiednimi wierzchołkami czworokąta  $ABCD$  wpisanego w okrąg. Prosta o równaniu  $x - y + 2 = 0$  jest jedyną osią symetrii tego czworokąta i zawiera przekątną  $AC$ . Oblicz współrzędne wierzchołków  $C$  i  $D$  tego czworokąta.

$$D = (6, 2), C = \left(\frac{8}{3}, \frac{14}{3}\right)$$

### 13. ZADANIE 16 (0-5) 2015

Punkty  $A = (-7, -2)$  i  $B = (4, -7)$  są wierzchołkami podstawy trójkąta równoramiennego  $ABC$ , a wysokość opuszczona z wierzchołka  $A$  tego trójkąta zawiera się w prostej o równaniu  $2x + 19y + 52 = 0$ . Oblicz współrzędne wierzchołka  $C$ .

$$C = (6, 12)$$

## STARA FORMUŁA:

### 14. ZADANIE 9 (0-5) M2020

Prosta o równaniu  $x + y - 10 = 0$  przecina okrąg o równaniu  $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 8 = 0$  w punktach  $K$  i  $L$ . Punkt  $S$  jest środkiem cięciwy  $KL$ . Wyznacz równanie obrazu tego okręgu w jednokładności o środku  $S$  i skali  $k = -3$ .

$$(x - 10)^2 + (y - 9)^2 = 153$$

### 15. ZADANIE 5 (0-6) M2019

Dane są okręgi o równaniach  $x^2 + y^2 - 12x - 8y + 43 = 0$  i

$x^2 + y^2 - 2ax + 4y + a^2 - 77 = 0$ . Wyznacz wszystkie wartości parametru  $a$ , dla których te okręgi mają dokładnie jeden punkt wspólny. Rozważ wszystkie przypadki.

$$a \in \{6 - 6\sqrt{3}, 6, 6 + 6\sqrt{3}\}$$

### 16. ZADANIE 5 (0-6) C2019

Punkt  $A = (-2, 6)$  jest wierzchołkiem rombu  $ABCD$  o polu 90. Przekątna  $BD$  zawiera się w prostej  $l$  o równaniu  $2x - y - 5 = 0$ . Wyznacz długość boku tego rombu.

$$3\sqrt{10}$$

### 17. ZADANIE 10 (0-6) M2018

Punkt  $A = (7, -1)$  jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego  $ABC$ , w którym  $|AC| = |BC|$ . Obie współrzędne wierzchołka  $C$  są liczbami ujemnymi. Okrąg wpisany w trójkąt  $ABC$  ma równanie  $x^2 + y^2 = 10$ . Oblicz współrzędne wierzchołków  $B$  i  $C$  tego trójkąta.

$$B = \left(-\frac{17}{5}, \frac{31}{5}\right), C = \left(-3, -\frac{13}{3}\right)$$

### 18. ZADANIE 11 (0-5) C2018

Wierzchołki  $A$  i  $B$  trójkąta prostokątnego  $ABC$  leżą na osi  $OY$  układu współrzędnych. Okrąg wpisany w ten trójkąt jest styczny do boków  $AB$ ,  $BC$  i  $CA$  w punktach odpowiednio  $P = (0, 10)$ ,  $Q = (8, 6)$  i  $R = (9, 13)$ . Oblicz współrzędne wierzchołków  $A$ ,  $B$  i  $C$  tego trójkąta.

$$A=(0,25), B=(0,0), C=(12,9)$$

### 19. ZADANIE 11 (0-5) M2017

Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkty  $A = (-5, 3)$  i  $B = (0, 6)$ , którego środek leży na prostej o równaniu  $x - 3y + 1 = 0$ .

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{17}{3}\right)^2$$

### 20. ZADANIE 6 (0-6) M2016

**Maturalne pewniaki – poziom rozszerzony:  
geometria analityczna**

Punkty  $A = (1, 1)$  i  $B = (6, 2)$  są wierzchołkami trójkąta  $ABC$ . Wysokości trójkąta  $ABC$  przecinają się w punkcie  $M = (3, 3)$ . Oblicz pole tego trójkąta.

$$\frac{21}{2}$$

---

**21. ZADANIE 6 (0-4) C2016**

Wyznacz równania stycznych do okręgu

$x^2 + y^2 + 12x + 4y + 36 = 0$ , przechodzących przez początek układu współrzędnych.

$$y = 0, y = \frac{3}{4}x$$

---

**22. ZADANIE 9 (0-5) M2015**

Wyznacz równania prostych stycznych do okręgu o równaniu

$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$  i zarazem prostopadłych do prostej  $x + 2y - 6 = 0$ .

$$y = 2x + 7 + 4\sqrt{5} \quad y = 2x + 7 - 4\sqrt{5}$$

---

**23. ZADANIE 8 (0-6) C2015**

Punkt  $M = (5, 6)$  jest środkiem ramienia  $BC$  trójkąta równoramiennego  $ABC$ , w którym  $|AC| = |BC|$ . Podstawa  $AB$  tego trójkąta jest zawarta w prostej o równaniu  $y = \frac{1}{3}x + 1$  oraz  $A = (-3, 0)$ . Oblicz współrzędne wierzchołka  $B$  tego trójkąta.

$$B = (9, 4)$$

---

**24. ZADANIE 8 (0-4) M2014**

Punkty  $A, B, C, D, E, F$  są kolejnymi wierzchołkami sześciokąta foremnego, przy czym  $A = (0, 2\sqrt{3})$ ,  $B = (2, 0)$ , a  $C$  leży na osi  $OX$ . Wyznacz równanie stycznej do okręgu opisanego na tym sześciokącie przechodzącej przez wierzchołek  $E$ .

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 6\sqrt{3} \text{ lub } y = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x - 6) + 4\sqrt{3}$$

---

**25. ZADANIE 7 (0-6) C2014**

**Maturalne pewniaki – poziom rozszerzony:  
geometria analityczna**

Odcinek  $AB$  o długości 4 jest zawarty w prostej o równaniu  $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$ . Symetralna odcinka  $AB$  przecina oś  $OY$  w punkcie  $P = (0, 6)$ . Oblicz współrzędne końców odcinka  $AB$ .

$$(2, 0) \quad \left(\frac{26}{5}, \frac{12}{5}\right)$$

### 26. ZADANIE 7 (0-4) M2013

Prosta o równaniu  $3x - 4y - 36 = 0$  przecina okrąg o środku  $S = (3, 12)$  w punktach  $A$  i  $B$ . Długość odcinka  $AB$  jest równa 40. Wyznacz równanie tego okręgu.

$$(x - 3)^2 + (y - 12)^2 = 625$$

### 27. ZADANIE 7 (0-4) C2012

Punkty  $A = (2, 0)$  i  $B = (4, 2)$  leżą na okręgu o równaniu  $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 10$ . Wyznacz na tym okręgu taki punkt  $C$ , aby trójkąt  $ABC$  był trójkątem równoramiennym o podstawie  $AB$ .

$$C = (1 - \sqrt{5}, 3 + \sqrt{5}) \text{ lub } C = (1 + \sqrt{5}, 3 - \sqrt{5})$$

### 28. ZADANIE 6 (0-6) M2012

W układzie współrzędnych rozważmy wszystkie punkty  $P$  postaci:  $P = \left(\frac{1}{2}m + \frac{5}{2}, m\right)$ , gdzie  $m \in \langle -1, 7 \rangle$ . Oblicz najmniejszą i największą wartość  $|PQ|^2$ , gdzie  $Q = \left(\frac{55}{2}, 0\right)$ .

$$f_{\min} = \frac{2045}{4}, f_{\max} = \frac{2605}{4}$$

### 29. ZADANIE 7 (0-4) C2012

Okrąg jest styczny do osi układu współrzędnych w punktach  $A = (0, 2)$  i  $B = (2, 0)$  oraz jest styczny do prostej  $l$  w punkcie  $C = (1, a)$ , gdzie  $a > 1$ . Wyznacz równanie prostej  $l$ .

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

### 30. ZADANIE 10 (0-4) C2012

**Maturalne pewniaki – poziom rozszerzony:  
geometria analityczna**

Na płaszczyźnie dane są punkty  $A = (3, -2)$  i  $B = (11, 4)$ . Na prostej o równaniu  $y = 8x + 10$  znajdź punkt  $P$ , dla którego suma  $|AP|^2 + |BP|^2$  jest najmniejsza.

**$P = (-1, 2)$**

---

**31. ZADANIE 7 (0-4) M2011**

Oblicz miarę kąta między stycznymi do okręgu  $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$  poprowadzonymi przez punkt  $A = (2, 0)$ .

**$90^\circ$**

---

**32. ZADANIE 7 (0-6) M2010**

Punkt  $A = (-2, 5)$  jest jednym z wierzchołków trójkąta równoramiennego,  $ABC$  w którym  $|AC| = |BC|$ . Pole tego trójkąta jest równe 15. Bok  $BC$  jest zawarty w prostej o równaniu  $y = x + 1$ . Oblicz współrzędne wierzchołka  $C$ .

**$C = (-3, -2)$  lub  $C = (5, 6)$**

---

**33. ZADANIE 9 (0-5) M2009**

W układzie współrzędnych narysuj okrąg o równaniu  $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$  oraz zaznacz punkt  $A = (0, -1)$ . Prosta o równaniu  $x = 0$  jest jedną ze stycznych do tego okręgu przechodzących przez punkt  $A$ . Wyznacz równanie drugiej stycznej do tego okręgu, przechodzącej przez punkt  $A$ .

**$y = -\frac{3}{4}x - 1$**

---

**34. ZADANIE 8 (0-4) M2008**

Wyznacz współrzędne środka jednokładności, w której obrazem okręgu o równaniu  $(x - 16)^2 + y^2 = 4$  jest okrąg o równaniu  $(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 16$ , a skala tej jednokładności jest liczbą ujemną.

**$(\frac{38}{3}, \frac{4}{3})$**

---

**35. ZADANIE 5 (0-7) M2007**

Wierzchołki trójkąta równobocznego  $ABC$  są punktami paraboli  $y = -x^2 + 6x$ . Punkt  $C$  jest jej wierzchołkiem, a bok  $AB$  jest równoległy do osi  $Ox$ . Sporządź rysunek w układzie współrzędnych i wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta.

Maturalne pewniaki – poziom rozszerzony:  
geometria analityczna

$$A = (3 - \sqrt{6}, 6), B = (3 + \sqrt{6}, 6), C = (3, 9)$$

SZKOŁA WYNIK